Rachunek prawdopodobieństwa

Lista nr 2 *Aksjomaty prawdopodobieństwa i jego własności, prawdopodobieństwo warunkowe*

1. Korzystając z aksjomatów prawdopodobieństwa udowodnij, że:
   a) $P(\emptyset) = 0$
   b) $\forall_{i \neq j = 1,\ldots,n}\ A_i \cap A_j = \emptyset \Longrightarrow P(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$
   c) $P(A') = 1 - P(A)$
   d) $A \subseteq B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
   e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   f) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$
   g) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
   h) $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$
   i) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
   j) $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

2. Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω. Niech $P : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ będzie skończenie addytywną, unormowaną funkcją zbioru, tzn. załóżmy, że $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, oraz $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla $A, B \in \mathcal{F}$ takich, że $A \cap B = \emptyset$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

   (a) P jest prawdopodobieństwem (funkcja P jest σ-addytywna)
   (b) P jest ciągła z dołu, tj. $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ dla każdego wstępującego ciagu zdarzeń $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$
   (c) P jest ciągła z góry, tj. $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ dla każdego zstępującego ciagu zdarzeń $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$
   (d) P jest ciągła z góry "w zerze", tj. $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ dla każdego zstępującego ciagu zdarzeń $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takich, że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$.

3. Pokazać, że dla σ-ciało $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru Ω jest ciałem, a ponadto $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

4. Sprawdzić, czy rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru Ω jest ciałem lub σ-ciałem, gdzie ($|A|$ oznacza moc zbioru A): gdy:

   a) $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : |A| \leqslant 1\}$, b) $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : |A| < \aleph_0\}$, c) $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : |A| \leqslant \aleph_0\}$,
   c) $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : |A| < \aleph_0 \text{ lub } |A'| < \aleph_0\}$, e) $\mathcal{R} = \{A \subset \Omega : |A| \leqslant \aleph_0 \text{ lub } |A'| \leqslant \aleph_0\}$.

5. Pokazać, że dla każdego zbioru Ω istnieje najmniejsze oraz największe σ-ciało podzbiorów zbioru Ω.

6. Wykazać, że na dla każdej rodziny $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru Ω istnieje najmniejsze σ-ciało zawierające $\mathcal{R}$.

7. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć najmniejszą σ-algebrę $\mathcal{F}$ zawierającą $\mathcal{R} = \{\{1\}, \{1, 2, 5\}, \{5\}\}$.

8. Pokazać, że na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ następujące zbiory są borelowskie

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

9. Niech $\{f_n\}_{n\in N}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji rzeczywistych na $\mathbb{R}$. Wykazać, że następujące zbiory są borelowskie:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \text{ granica } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ istnieje}\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } \{f_n(x)\}_{n\in} \text{ dąży do liczby wymiernej}\}$$

10. Niech $\Omega = [0, 1]$ oraz niech $\mathcal{F}$ będzie pewną σ-algebrą podzbiorów Ω. Udowodnić, że funkcja

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy } \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$

określona na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ jest prawdopodobieństwem.

11. Dane są: $P(A') = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(B'), P(A \cap B'), P(B \setminus A)$.

12. Dane są: $P(A \cup B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ oraz wiadomo, że $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Oblicz $P(A), P(B \setminus A)$.

13. Wykaż, że jeśli $P(A) = a, P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A \mid B) \geqslant 1 - \frac{1-a}{b}$.

14. Zbadaj, dla jakich zdarzeń A, B spełniony jest warunek $P(A) = \frac{1}{2}(P(A \mid B) + P(A \mid B'))$.

15. Udowodnij, że jeżeli $A \cap B \subseteq C$, to $P(A) + P(B) - P(C) \leqslant 1$.

16. W pewnym zbiorze Ω dane są zdarzenia A, B o własnościach: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A') = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

17. W pewnym zbiorze Ω dane są zdarzenia A, B takie, że $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$. Czy A i B mogą się wykluczać? Ile co najmniej wynosi $P(A \cap B)$?

18. Udowodnić, że jeżeli $P(A) + P(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$.

19. Niech $A, B, C \subseteq \Omega$ będą zdarzeniami takimi, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$ oraz $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Udowodnij, że $\dfrac{1}{6} \leqslant P(A) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

20. Udowodnij, że jeżeli $A, B \in \Omega$, $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$, to $P(A|B) \geqslant \frac{2}{3}$.

21. Udowodnij, że $\forall_{A,B \subseteq \Omega} \quad P(A) = 1 - P(A' \cap B) - P((A \cup B)')$

22. Niech $P(A) = x$ i $P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Ile wynosi x?

23. Udowodnij, że jeżeli $P(B) > 0$, to $P(A|B) \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{P(A)}{P(B)}$

24. Wykazać, że jeżeli $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$ to zachodzi (a w szczególności ma sens) następujący wzór, zwany *wzorem łańcuchowym*: $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$.

25. Wykazać, że jeżeli zbiory $B_1, B_2, ..., B_n$ stanowią rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobiestwie, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór na *prawdopodobieństwo całkowite*:
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

26. Udowodnić, że jeżeli przy założeniach z powyższego zadania $P(A) > 0$, to dla dowlnego $i_0 = 1, ..., n$ zachodzi *wzór Bayesa*:
$$P(B_{i_0}|A) = \frac{P(A|B_{i_0}) \cdot P(B_{i_0})}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

27. Rzucamy trzema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy dwa orły pod warunkiem, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł.

28. Losujemy kartę z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy króla, jeżeli wiadomo, że wylosowano figurę?

29. W urnie jest 7 kul: 3 białe i 4 czarne. Losujemy jedną kulę i odkładamy ją. Następnie losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula czarna, jeżeli za pierwszym razem wylosowano kulę białą.

30. Losujemy liczbę naturalną. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez 6, jeżeli wiadomo, że jest podzielna przez 2.